

Texto Explicativo

Seno, Cosseno e Tangente — dos Triângulos aos Gráficos

Material de apoio — Matemática 1 — Razões trigonométricas: tangente de um ângulo

1. As Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

A trigonometria nasce de uma observação simples: em um triângulo retângulo, quando fixamos um ângulo agudo θ , as razões entre os lados não dependem do tamanho do triângulo — dependem apenas do ângulo. Um triângulo pequeno e um triângulo enorme com o mesmo ângulo θ têm exatamente as mesmas razões entre seus lados. É por isso que essas razões recebem nomes próprios e podem ser tabeladas: são o **seno**, o **cosseno** e a **tangente**.

Antes de defini-las, é preciso identificar os três lados do triângulo em relação ao ângulo θ escolhido: a **hipotenusa** é o lado maior, oposto ao ângulo reto; o **cateto oposto** é o lado que fica “do outro lado” do ângulo θ , sem tocá-lo; e o **cateto adjacente** é o cateto que forma o ângulo θ junto com a hipotenusa. Atenção: os papéis de oposto e adjacente trocam de lugar se mudarmos o ângulo de referência para o outro ângulo agudo.

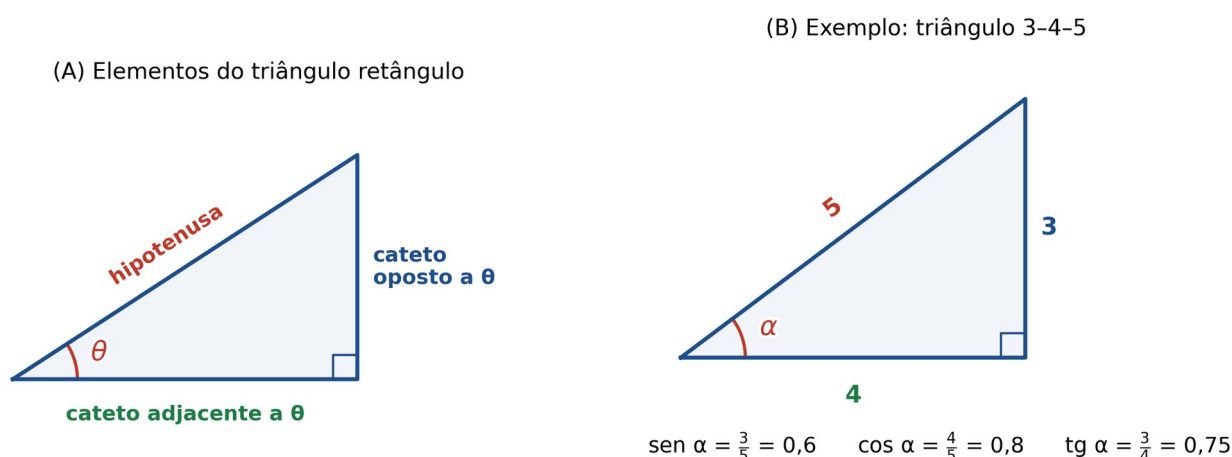


Figura 1 — Os elementos do triângulo retângulo (A) e um exemplo numérico com o triângulo 3-4-5 (B).

Com os lados identificados, as três razões são definidas assim:

$$\text{sen } \theta = \text{cateto oposto} / \text{hipotenusa}$$

$$\text{cos } \theta = \text{cateto adjacente} / \text{hipotenusa}$$

$$\text{tg } \theta = \text{cateto oposto} / \text{cateto adjacente}$$

Cada razão conta uma história diferente. O seno mede quanto o triângulo “sobe” em relação ao comprimento da hipotenusa; o cosseno mede quanto ele “avança” na horizontal em relação à hipotenusa; e a tangente compara diretamente a subida com o avanço — por isso ela é a medida natural de **inclinação**. No triângulo 3-4-5 da Figura 1(B), o cateto oposto ao ângulo α mede 3, o adjacente mede 4 e a hipotenusa mede 5, o que dá $\text{sen } \alpha = 0,6$, $\text{cos } \alpha = 0,8$ e $\text{tg } \alpha = 0,75$.

2. A Tangente é o Quociente do Seno pelo Cosseno

As três razões não são independentes. Dividindo o seno pelo cosseno, a hipotenusa aparece no numerador e no denominador e é cancelada:

$$\text{sen } \theta / \text{cos } \theta = (\text{oposto/hipotenusa}) / (\text{adjacente/hipotenusa}) = \text{oposto/adjacente} = \text{tg } \theta$$

Ou seja, $\text{tg } \theta = \text{sen } \theta / \text{cos } \theta$. Essa relação é a ponte entre as três razões: conhecendo duas delas, a terceira vem de graça. No exemplo do triângulo 3-4-5: $0,6 / 0,8 = 0,75$, exatamente o valor de $\text{tg } \alpha$. Ela também explica um fato

importante que veremos no gráfico: quando $\cos \theta = 0$ (o que acontece em 90° e 270°), a divisão é impossível — e por isso a tangente **não é definida** nesses ângulos.

3. Do Triângulo ao Círculo Trigonométrico

O triângulo retângulo só permite ângulos entre 0° e 90° . Para estender seno, cosseno e tangente a qualquer ângulo, usamos o **círculo trigonométrico**: uma circunferência de raio 1 centrada na origem do plano cartesiano. Marcamos o ângulo θ a partir do semieixo positivo x, girando no sentido anti-horário, e observamos o ponto P em que o lado do ângulo corta a circunferência.

Seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico ($r = 1$)

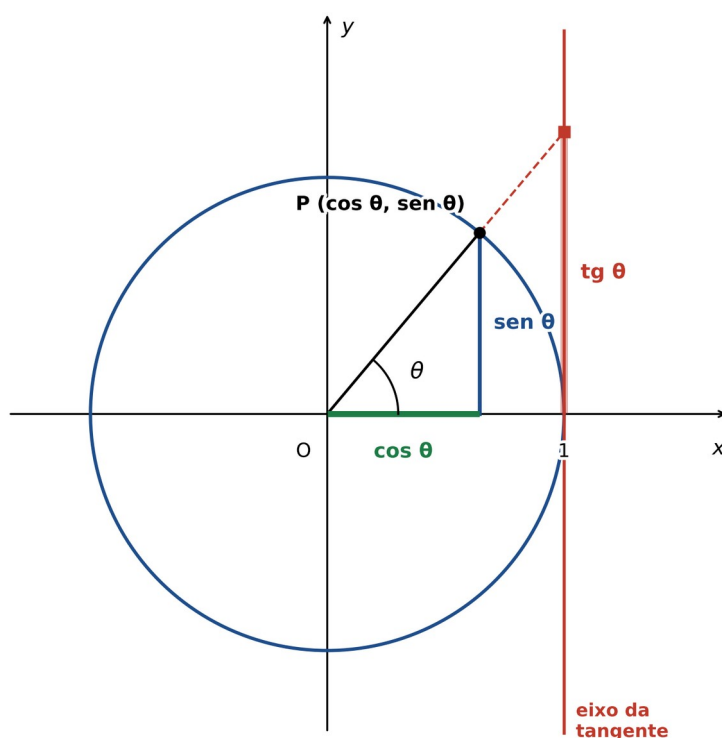


Figura 2 — No círculo de raio 1, o cosseno é a sombra horizontal do ponto P, o seno é a altura vertical e a tangente é lida na reta vertical $x = 1$.

A ideia central: dentro do círculo há um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o próprio raio, que vale 1. Como dividir por 1 não muda nada, as razões viram medidas diretas: o **cosseno é a abscissa (coordenada x) do ponto P** e o **seno é a ordenada (coordenada y)**. Em símbolos, $P = (\cos \theta, \sin \theta)$.

E a tangente? Ela ganha uma reta só para ela: a reta vertical que toca o círculo no ponto $(1, 0)$, chamada **eixo da tangente**. Prolongando o raio que passa por P até encontrar essa reta, a altura do ponto de encontro é exatamente $\tan \theta$. Isso torna visível por que $\tan 45^\circ = 1$, por que a tangente cresce sem limite quando θ se aproxima de 90° (o raio fica quase paralelo à reta e o encontro “foge” para cima) e por que ela não existe em 90° : o raio fica paralelo ao eixo da tangente e nunca o encontra.

4. Os Gráficos das Funções Seno, Cosseno e Tangente

Imagine o ponto P dando uma volta completa no círculo, de 0° a 360° , enquanto anotamos os valores de seno, cosseno e tangente para cada ângulo. Colocando o ângulo no eixo horizontal e o valor da razão no eixo vertical, obtemos os gráficos da Figura 3.

Gráficos das funções seno, cosseno e tangente

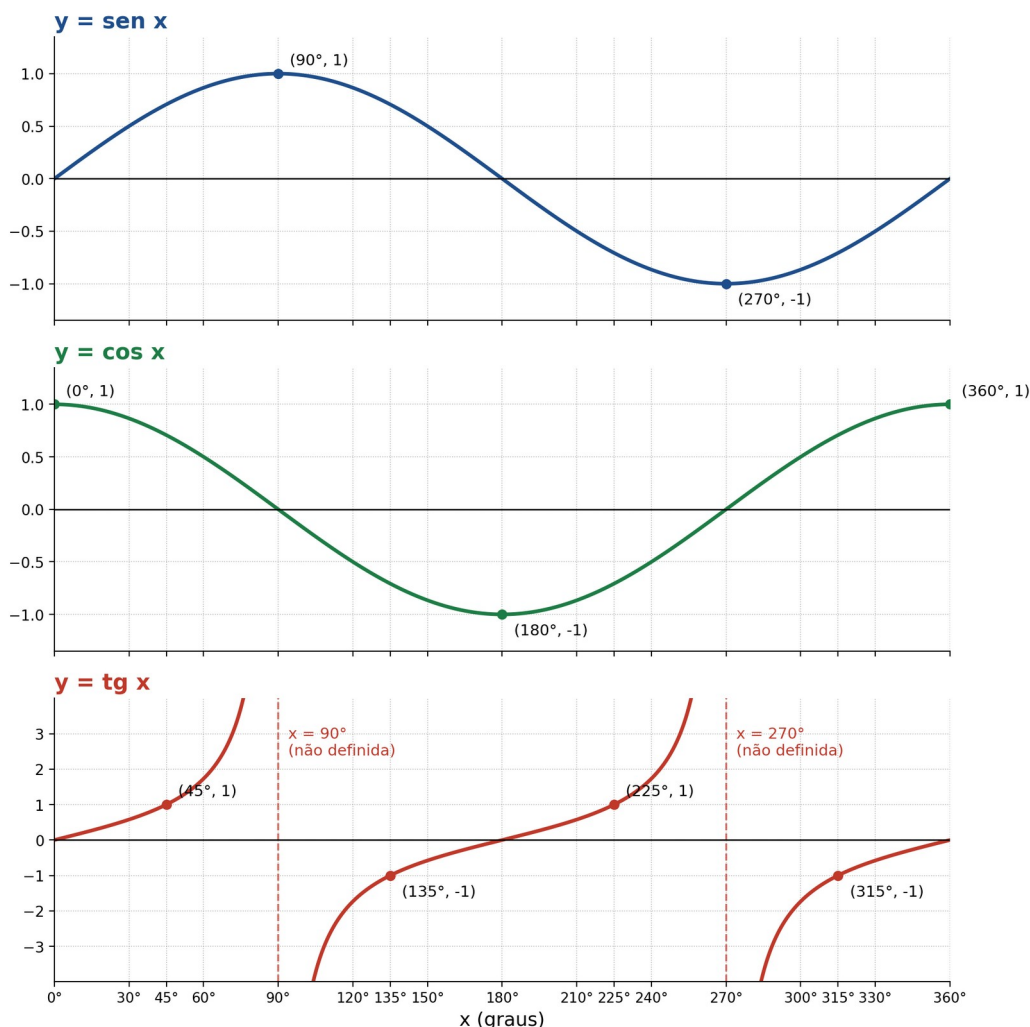


Figura 3 — Gráficos de $y = \sin x$, $y = \cos x$ e $y = \tan x$ para x de 0° a 360°. As retas tracejadas marcam os ângulos em que a tangente não é definida.

Seno e cosseno geram ondas suaves que oscilam sempre entre -1 e 1 — faz sentido, pois são coordenadas de um ponto que nunca sai do círculo de raio 1. As duas curvas têm o mesmo formato, apenas deslocadas: o cosseno começa em 1 (quando $\theta = 0^\circ$, o ponto P está em (1, 0)) e o seno começa em 0. Ambas se repetem a cada 360°, ou seja, são **periódicas de período 360°**.

A tangente tem comportamento bem diferente: não fica presa entre -1 e 1 — pode assumir qualquer valor real. Perto de 90° e de 270° ela “explode”, crescendo (ou decrescendo) sem limite, e nesses dois ângulos ela simplesmente não existe, pois o cosseno vale zero ali. As retas verticais tracejadas do gráfico, chamadas **assíntotas**, marcam essas fronteiras. Repare também que o padrão da tangente se repete a cada 180°, e não a cada 360°: seu período é a metade do período do seno e do cosseno.

5. Valores Notáveis

Três ângulos aparecem o tempo todo nos exercícios e merecem ser memorizados. A tabela abaixo pode ser conferida tanto nos triângulos quanto nos gráficos:

	30°	45°	60°
sen	$1/2 = 0,5$	$\sqrt{2}/2 \approx 0,707$	$\sqrt{3}/2 \approx 0,866$
cos	$\sqrt{3}/2 \approx 0,866$	$\sqrt{2}/2 \approx 0,707$	$1/2 = 0,5$
tg	$\sqrt{3}/3 \approx 0,577$	1	$\sqrt{3} \approx 1,732$

Uma boa verificação: em 45° , seno e cosseno são iguais, então $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ — no gráfico da tangente, a curva passa exatamente pela altura 1 nesse ângulo. E a linha da tangente na tabela pode ser obtida dividindo a linha do seno pela do cosseno.

6. Exemplos Resolvidos

Exemplo 1 — identificando as razões. Em um triângulo retângulo, os catetos medem 6 cm e 8 cm, e a hipotenusa mede 10 cm. Para o ângulo θ oposto ao cateto de 6 cm: $\operatorname{sen} \theta = 6/10 = 0,6$; $\operatorname{cos} \theta = 8/10 = 0,8$; $\operatorname{tg} \theta = 6/8 = 0,75$. Observe que $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{sen} \theta / \operatorname{cos} \theta = 0,6/0,8 = 0,75$, confirmando a relação da Seção 2. (Este triângulo é o 3-4-5 da Figura 1 ampliado ao dobro — as razões não mudam, como prometido.)

Exemplo 2 — calculando uma altura com a tangente. Um observador está a 40 m da base de um prédio e vê o topo sob um ângulo de elevação de 60° . No triângulo formado, a distância de 40 m é o cateto adjacente e a altura h é o cateto oposto: $\operatorname{tg} 60^\circ = h / 40$. Como $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1,732$, temos $h = 40 \times 1,732 \approx 69,3$ m. A tangente é a ferramenta ideal aqui porque relaciona os dois catetos sem precisar da hipotenusa.

Exemplo 3 — usando seno e cosseno. Uma escada de 5 m está apoiada em uma parede, formando 30° com ela (ângulo no topo). A distância da base da escada até a parede é o cateto oposto a esse ângulo: $\operatorname{sen} 30^\circ = d / 5$, logo $d = 5 \times 0,5 = 2,5$ m. A altura alcançada na parede é o cateto adjacente: $\operatorname{cos} 30^\circ = a / 5$, logo $a = 5 \times 0,866 \approx 4,33$ m. Verificação com Pitágoras: $2,5^2 + 4,33^2 = 6,25 + 18,75 \approx 25 = 5^2$. ✓

Resumo

No triângulo retângulo: $\operatorname{sen} \theta = \text{oposto}/\text{hipotenusa}$, $\operatorname{cos} \theta = \text{adjacente}/\text{hipotenusa}$ e $\operatorname{tg} \theta = \text{oposto}/\text{adjacente} = \operatorname{sen} \theta / \operatorname{cos} \theta$. No círculo de raio 1, o ponto P associado ao ângulo θ tem coordenadas $(\operatorname{cos} \theta, \operatorname{sen} \theta)$, e a tangente é lida na reta $x = 1$. Nos gráficos, seno e cosseno são ondas entre -1 e 1 com período 360° ; a tangente assume todos os valores reais, tem período 180° e não é definida em 90° e 270° , onde o cosseno se anula.