

Gabarito com Resolução — Progressões Aritméticas (PA)

Razão e classificação; termo geral; interpolação aritmética; propriedade do termo médio; soma dos termos de uma PA; problemas aplicados

1. Determine a razão de cada sequência abaixo, verificando que são progressões aritméticas,...

Fórmula(s): $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots$; $r > 0$: crescente; $r < 0$: decrescente; $r = 0$: constante

Em uma PA a diferença entre um termo e o anterior é constante, e essa diferença é a razão $r = a_2 - a_1$. (a) $r = 7 - 3 = 4$ (e $11 - 7 = 4$, $15 - 11 = 4$ ✓): $r > 0 \rightarrow$ PA crescente. (b) $r = 17 - 20 = -3$ (e $14 - 17 = -3$, $11 - 14 = -3$ ✓): $r < 0 \rightarrow$ PA decrescente. (c) $r = 6 - 6 = 0$: PA constante (estacionária).

2. Em uma PA, o primeiro termo é 3 e a razão é 4. Calcule o 20º termo dessa progressão.

Fórmula(s): $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$. Com $a_1 = 3$, $r = 4$ e $n = 20$: $a_{20} = 3 + 19 \times 4 = 3 + 76 = 79$.

3. Na PA (7, 11, 15, 19, ...), qual é a posição ocupada pelo termo 83?

Fórmula(s): $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ (isolando n)

Aqui $a_1 = 7$ e $r = 11 - 7 = 4$. Fazendo $a_n = 83$: $83 = 7 + (n - 1) \times 4 \rightarrow 76 = (n - 1) \times 4 \rightarrow n - 1 = 19 \rightarrow n = 20$. O termo 83 ocupa a 20ª posição.

4. Em uma PA, o 5º termo vale 18 e o 9º termo vale 34. Determine a razão e o primeiro termo.

Fórmula(s): $a_n = a_k + (n - k) \cdot r \rightarrow r = (a_9 - a_5) / (9 - 5)$; $a_1 = a_5 - 4r$

Do 5º ao 9º termo há 4 passos: $a_9 = a_5 + 4r \rightarrow 34 = 18 + 4r \rightarrow 4r = 16 \rightarrow r = 4$. Primeiro termo: $a_5 = a_1 + 4r \rightarrow 18 = a_1 + 16 \rightarrow a_1 = 2$. (PA: 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, ...)

5. Insira 5 meios aritméticos entre 4 e 40, formando uma PA de 7 termos. Escreva a PA...

Fórmula(s): Nº de termos: $n = k + 2$; $r = (a_n - a_1) / (n - 1)$

Com 5 meios entre os extremos, a PA tem $n = 5 + 2 = 7$ termos, com $a_1 = 4$ e $a_7 = 40$. Razão: $a_7 = a_1 + 6r \rightarrow 40 = 4 + 6r \rightarrow r = 36/6 = 6$. PA: (4, 10, 16, 22, 28, 34, 40). Os meios aritméticos são 10, 16, 22, 28 e 34.

6. Para que valor de x os números $(x - 2)$, $(2x + 1)$ e $(4x - 1)$, nessa ordem, formam uma PA?...

Fórmula(s): Propriedade do termo médio: $2 \cdot b = a + c$ (a , b , c em PA consecutivos)

Pela propriedade do termo médio, o termo do meio é a média aritmética dos vizinhos: $2 \cdot (2x + 1) = (x - 2) + (4x - 1) \rightarrow 4x + 2 = 5x - 3 \rightarrow x = 5$. Substituindo: (3, 11, 19), com razão $r = 8$ ($11 - 3 = 8$ e $19 - 11 = 8$ ✓).

7. Calcule a soma dos 30 primeiros termos da PA (2, 5, 8, 11, ...).

Fórmula(s): $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$; $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n / 2$

$a_1 = 2$, $r = 3$. Último termo: $a_{30} = 2 + 29 \times 3 = 2 + 87 = 89$. Soma: $S_{30} = (a_1 + a_{30}) \cdot 30 / 2 = (2 + 89) \times 15 = 91 \times 15 = 1365$.

8. Qual é a soma de todos os múltiplos de 5 compreendidos entre 1 e 100?

Fórmula(s): PA (5, 10, ..., 100): $n = (a_n - a_1) / r + 1$; $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n / 2$

Os múltiplos de 5 entre 1 e 100 formam a PA (5, 10, 15, ..., 100), com $a_1 = 5$, $r = 5$ e $a_n = 100$. Número de termos: $100 = 5 + (n - 1) \times 5 \rightarrow n - 1 = 19 \rightarrow n = 20$. Soma: $S_{20} = (5 + 100) \times 20 / 2 = 105 \times 10 = 1050$.

9. Maria decidiu poupar dinheiro: no 1º mês guardou R\$ 50,00 e, a cada mês seguinte, guardou...

Fórmula(s): $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$; $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n / 2$

Os valores guardados formam uma PA com $a_1 = 50$ e $r = 20$. No 12º mês: $a_{12} = 50 + 11 \times 20 = 50 + 220 = \text{R\$ } 270,00$. Total acumulado em 12 meses: $S_{12} = (a_1 + a_{12}) \cdot 12 / 2 = (50 + 270) \times 6 = 320 \times 6 = \text{R\$ } 1.920,00$.

- 10.** Três números estão em PA crescente. Sabendo que a soma deles é 21 e que o produto é 280,...

Fórmula(s): $S = (x - r) + x + (x + r) = 3x$; *produto:* $(x - r) \cdot x \cdot (x + r) = x \cdot (x^2 - r^2)$

Soma: $(x - r) + x + (x + r) = 3x = 21 \rightarrow x = 7$. Produto: $(7 - r) \cdot 7 \cdot (7 + r) = 280 \rightarrow 7 \cdot (49 - r^2) = 280 \rightarrow 49 - r^2 = 40 \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = 3$ (PA crescente). Os números são $7 - 3 = 4$, 7 e $7 + 3 = 10$.

Verificação: $4 + 7 + 10 = 21 \checkmark$ e $4 \times 7 \times 10 = 280 \checkmark$.