

Textos Explicativos

Progressões Aritméticas (PA)

Material de apoio para a Lista de Exercícios — Razão e classificação; termo geral; interpolação aritmética; propriedade do termo médio; soma dos termos de uma PA; problemas aplicados

1. Progressão Aritmética: Razão e Classificação

Questão relacionada: 1

Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência numérica em que a diferença entre cada termo e o termo anterior é sempre a mesma. Essa diferença constante é chamada de razão (r). Para verificar se uma sequência é uma PA, calculam-se as diferenças entre termos consecutivos e confere-se se todas são iguais. De acordo com o sinal da razão, a PA é classificada em:

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots \quad r > 0: \text{crescente} \quad r < 0: \text{decrescente} \quad r = 0: \text{constante}$$

Exemplo (a): (3, 7, 11, 15, ...): $r = 7 - 3 = 4$, e também $11 - 7 = 4$ e $15 - 11 = 4$. Como $r > 0$, a PA é crescente.

Exemplo (b): (20, 17, 14, 11, ...): $r = 17 - 20 = -3$ (e $14 - 17 = -3$, $11 - 14 = -3$). Como $r < 0$, a PA é decrescente.

Exemplo (c): (6, 6, 6, 6, ...): $r = 6 - 6 = 0$. Como $r = 0$, a PA é constante.

2. O Termo Geral da PA: Calculando Termos, Posições e a Razão

Questões relacionadas: 2, 3 e 4

Para chegar a qualquer termo de uma PA sem escrever toda a sequência, parte-se do primeiro termo e somam-se $(n - 1)$ razões. Essa é a fórmula do termo geral. Ela também pode ser usada a partir de qualquer termo conhecido (a_k), e a ideia é sempre a mesma: contar quantos "passos" de tamanho r separam os dois termos.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \quad a_n = a_k + (n - k) \cdot r$$

Exemplo 1 — calculando um termo: em uma PA com $a_1 = 3$ e $r = 4$, o 20º termo é $a_{20} = 3 + 19 \times 4 = 3 + 76 = 79$.

Exemplo 2 — descobrindo a posição: na PA (7, 11, 15, 19, ...), em qual posição está o termo 83? Temos $a_1 = 7$ e $r = 4$. Fazendo $a_n = 83$: $83 = 7 + (n - 1) \times 4 \rightarrow 76 = (n - 1) \times 4 \rightarrow n - 1 = 19 \rightarrow n = 20$. O termo 83 ocupa a 20ª posição.

Exemplo 3 — descobrindo a razão e o 1º termo: em uma PA, $a_5 = 18$ e $a_9 = 34$. Do 5º ao 9º termo há 4 passos: $a_9 = a_5 + 4r \rightarrow 34 = 18 + 4r \rightarrow r = 4$. Para o primeiro termo: $a_5 = a_1 + 4r \rightarrow 18 = a_1 + 16 \rightarrow a_1 = 2$. A PA é (2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, ...).

3. Interpolação Aritmética

Questão relacionada: 5

Interpolarmos k meios aritméticos entre dois números dados significa inserir k termos entre eles, de modo que toda a sequência forme uma PA. Os números dados são o primeiro e o último termo, e a PA resultante tem $n = k + 2$ termos. A razão é obtida pela fórmula do termo geral:

$$n = k + 2 \quad r = (a_n - a_1) / (n - 1)$$

Exemplo prático: inserir 5 meios aritméticos entre 4 e 40. A PA terá $n = 5 + 2 = 7$ termos, com $a_1 = 4$ e $a_7 = 40$. A razão é $r = (40 - 4)/6 = 36/6 = 6$. A PA completa é (4, 10, 16, 22, 28, 34, 40), e os meios aritméticos são 10, 16, 22, 28 e 34.

4. Propriedade do Termo Médio e Três Termos em PA

Questões relacionadas: 6 e 10

Em uma PA, cada termo (exceto o primeiro e o último) é a média aritmética dos seus vizinhos. Assim, se a, b e c são três termos consecutivos de uma PA, vale a propriedade do termo médio, muito útil quando os termos envolvem incógnitas:

$$2 \cdot b = a + c$$

Exemplo 1 — descobrindo x: para que valor de x os números $(x - 2)$, $(2x + 1)$ e $(4x - 1)$ formam uma PA? Pela propriedade: $2 \cdot (2x + 1) = (x - 2) + (4x - 1) \rightarrow 4x + 2 = 5x - 3 \rightarrow x = 5$. Substituindo, a PA é (3, 11, 19), com razão $r = 8$ ($11 - 3 = 8$ e $19 - 11 = 8$).

Uma consequência prática dessa propriedade aparece quando se sabe que três números estão em PA: é conveniente representá-los por $(x - r)$, x e $(x + r)$, com x sendo o termo do meio. Assim, ao somar os três, a razão desaparece e a soma vale $3x$:

$$S = (x - r) + x + (x + r) = 3x \quad \text{Produto} = (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = x \cdot (x^2 - r^2)$$

Exemplo 2 — soma e produto: três números em PA crescente têm soma 21 e produto 280. Da soma: $3x = 21 \rightarrow x = 7$. Do produto: $7 \cdot (49 - r^2) = 280 \rightarrow 49 - r^2 = 40 \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = 3$ (a PA é crescente, então r é positivo). Os números são $7 - 3 = 4$, 7 e $7 + 3 = 10$. Conferindo: $4 + 7 + 10 = 21$ e $4 \times 7 \times 10 = 280$.

5. A Soma dos Termos de uma PA

Questões relacionadas: 7, 8 e 9

A soma dos n primeiros termos de uma PA usa uma ideia simples: em uma PA, termos equidistantes dos extremos somam sempre o mesmo valor ($a_1 + a_n$). Assim, os n termos formam $n/2$ pares com essa soma:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot n / 2$$

Na prática, é comum precisar antes do último termo, calculado por $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, ou da quantidade de termos, obtida isolando n: $n = (a_n - a_1)/r + 1$.

Exemplo 1 — soma dos 30 primeiros termos: na PA (2, 5, 8, 11, ...), $a_1 = 2$ e $r = 3$. O 30º termo é $a_{30} = 2 + 29 \times 3 = 89$. A soma é $S_{30} = (2 + 89) \times 30/2 = 91 \times 15 = 1365$.

Exemplo 2 — múltiplos de 5 entre 1 e 100: eles formam a PA (5, 10, 15, ..., 100), com $a_1 = 5$, $r = 5$ e $a_n = 100$. Quantidade de termos: $n = (100 - 5)/5 + 1 = 20$. A soma é $S_{20} = (5 + 100) \times 20/2 = 105 \times 10 = 1050$.

Exemplo 3 — problema aplicado: Maria guardou R\$ 50,00 no 1º mês e, a cada mês, R\$ 20,00 a mais que no anterior. Os valores formam uma PA com $a_1 = 50$ e $r = 20$. No 12º mês: $a_{12} = 50 + 11 \times 20 = \text{R\$ } 270,00$. Total acumulado: $S_{12} = (50 + 270) \times 12/2 = 320 \times 6 = \text{R\$ } 1.920,00$.