

Textos Explicativos

Teorema de Tales

Material de apoio para a Lista de Exercícios — Feixe de retas paralelas cortadas por transversais;
proporcionalidade de segmentos; aplicação em triângulos e em problemas do cotidiano

1. O Teorema de Tales: Proporção entre Segmentos de um Feixe de Paralelas

Questões relacionadas: 1, 2, 3 e 4

O Teorema de Tales afirma que um feixe de retas paralelas cortado por duas retas transversais determina, nas transversais, segmentos proporcionais: a razão entre dois segmentos de uma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra. Para as paralelas a , b e c cortadas pelas transversais t (pontos A , B , C) e s (pontos A' , B' , C'):

$$AB / BC = A'B' / B'C' \quad (\text{também: } AB / A'B' = BC / B'C' \text{ e } AC / A'C' = AB / A'B')$$

Na prática, monta-se a proporção com segmentos correspondentes (os que ficam entre as mesmas paralelas) e resolve-se por multiplicação cruzada: o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Quando há uma incógnita x , a proporção vira uma equação do 1º grau.

Exemplo 1 — incógnita no 2º segmento: $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 9 \text{ cm}$ e $A'B' = 4 \text{ cm}$. Então $6/9 = 4/B'C' \rightarrow 6 \times B'C' = 9 \times 4 = 36 \rightarrow B'C' = 6 \text{ cm}$.

Exemplo 2 — incógnita no 1º segmento: $AB = x$, $BC = 12 \text{ cm}$, $A'B' = 5 \text{ cm}$ e $B'C' = 15 \text{ cm}$. Então $x/12 = 5/15 \rightarrow 15x = 12 \times 5 = 60 \rightarrow x = 4 \text{ cm}$. Conferindo: $5/15 = 1/3$ e $4/12 = 1/3$.

Exemplo 3 — incógnita nos dois termos: $AB = x$, $BC = x + 4$, $A'B' = 3 \text{ cm}$ e $B'C' = 5 \text{ cm}$. Então $x/(x + 4) = 3/5 \rightarrow 5x = 3(x + 4) \rightarrow 5x = 3x + 12 \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$. Logo $AB = 6 \text{ cm}$ e $BC = 6 + 4 = 10 \text{ cm}$. Conferindo: $6/10 = 3/5$.

2. O Teorema de Tales no Triângulo

Questões relacionadas: 7 e 8

Quando uma reta paralela a um dos lados de um triângulo corta os outros dois lados, ela forma, com esses lados, o mesmo tipo de situação do feixe de paralelas: os lados são divididos em segmentos proporcionais. Em um triângulo ABC , com D em AB , E em AC e $DE \parallel BC$:

$$AD / DB = AE / EC \quad AB = AD + DB \quad AC = AE + EC$$

Atenção: o lado inteiro é a soma das duas partes, e a medida pedida às vezes é o lado todo, e não apenas uma das partes.

Exemplo 1 — calculando EC e AC : $AD = 4 \text{ cm}$, $DB = 6 \text{ cm}$ e $AE = 6 \text{ cm}$. Então $4/6 = 6/EC \rightarrow 4 \times EC = 36 \rightarrow EC = 9 \text{ cm}$. O lado AC mede $AE + EC = 6 + 9 = 15 \text{ cm}$.

Exemplo 2 — com incógnita x : $AD = x$, $DB = x + 3$, $AE = 4 \text{ cm}$ e $EC = 6 \text{ cm}$. Então $x/(x + 3) = 4/6 = 2/3 \rightarrow 3x = 2(x + 3) \rightarrow 3x = 2x + 6 \rightarrow x = 6$. Logo $AD = 6 \text{ cm}$, $DB = 9 \text{ cm}$ e $AB = 6 + 9 = 15 \text{ cm}$. Conferindo: $6/9 = 2/3$ e $4/6 = 2/3$.

3. Mais de Dois Segmentos: a Razão de Proporcionalidade (k)

Questões relacionadas: 5, 9 e 10

Quando o feixe tem três ou mais segmentos, todos eles são proporcionais aos correspondentes, com uma mesma razão k . Um caminho prático é comparar os totais: divide-se o total conhecido de uma transversal pelo total da outra para obter k , e multiplica-se cada segmento por k para achar o correspondente:

$$k = \text{total de uma transversal} \div \text{total da outra} \quad \text{segmento correspondente} = k \times \text{segmento}$$

Exemplo 1 — terrenos: as frentes de três terrenos medem 20 m, 30 m e 40 m (soma 90 m), e a soma das larguras nos fundos é 135 m. Então $k = 135/90 = 1,5$, e as larguras são $20 \times 1,5 = 30$ m, $30 \times 1,5 = 45$ m e $40 \times 1,5 = 60$ m. Conferindo: $30 + 45 + 60 = 135$ m.

Exemplo 2 — segmentos de uma transversal: na 1ª transversal, os segmentos medem 3 cm, 5 cm e 7 cm (total 15 cm), e o total da 2ª é 30 cm. Então $k = 30/15 = 2$, e os segmentos da 2ª medem 6 cm, 10 cm e 14 cm (soma 30 cm).

Exemplo 3 — ruas e avenidas: na Avenida 1, as distâncias entre as ruas são 80 m e 120 m (total 200 m), e na Avenida 2 o total é 150 m. Então $k = 150/200 = 0,75$, e as distâncias na Avenida 2 são $80 \times 0,75 = 60$ m e $120 \times 0,75 = 90$ m. Conferindo: $60 + 90 = 150$ m e $60/90 = 80/120 = 2/3$.

4. Sombras e Raios Solares Paralelos

Questão relacionada: 6

Os raios do Sol chegam à Terra praticamente paralelos. Por isso, no mesmo instante, objetos verticais de alturas diferentes projetam sombras proporcionais às suas alturas: os triângulos formados por cada objeto, sua sombra e o raio solar têm a mesma inclinação, e a razão entre a altura e a sombra é a mesma para todos. Essa é uma aplicação do Teorema de Tales e permite medir alturas inacessíveis.

$$\text{altura do poste} / \text{sombra do poste} = \text{altura do prédio} / \text{sombra do prédio}$$

Exemplo prático: um poste de 3 m projeta uma sombra de 2 m, e, no mesmo instante, um prédio projeta uma sombra de 30 m. Então $3/2 = h/30 \rightarrow 2h = 90 \rightarrow h = 45$ m.